**Lý thuyết và ví dụ:**

Chúng ta xuất phát từ tính chất sau:

**Tính chất 1:**

*a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

*b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

*c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.*

*d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.*

Việc chứng minh tính chất trên không khó, xin dành cho bạn đọc. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên x = am, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

– Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.

– Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì am = a4n + r = a4n.ar với r = 0, 1, 2, 3 nên từ tính chất 1c => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của ar.

– Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của 6.ar.

**Bài toán 1:** Tìm chữ số tận cùng của các số:
a) 799   b) 141414   c) 4567

**Lời giải:**
a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4:
99 – 1 = (9 – 1)(98 + 97 + … + 9 + 1) chia hết cho 4
=> 99 = 4k + 1 (k thuộc N) => 799 = 74k + 1 = 74k.7
Do 74k có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) => 799 có chữ số tận cùng là 7.
b) Dễ thấy 1414 = 4k (k thuộc N) => theo tính chất 1d thì 141414 = 144k có chữ số tận cùng là 6.
c) Ta có 567 – 1 chia hết cho 4 => 567 = 4k + 1 (k thuộc N)
=> 4567 = 44k + 1 = 44k.4, theo tính chất 1d, 44k có chữ số tận cùng là 6 nên 4567 có chữ số tận cùng là 4.

Tính chất sau được => từ tính chất 1.

**Tính chất 2:***Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

**Bài toán 2:** Tìm chữ số tận cùng của tổng S = 21 + 35 + 49 + … + 20048009.

**Lời giải:**

*Nhận xét:* Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng n4(n – 2) + 1, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

(2 + 3 + … + 9) + 199.(1 + 2 + … + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + … + 9) + 9 = 9009.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Từ tính chất 1 tiếp tục => tính chất 3.

**Tính chất 3:**

*a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.*

*b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.*

*c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.*

**Bài toán 3:** Tìm chữ số tận cùng của tổng T = 23 + 37 + 411 + … + 20048011.

**Lời giải:**

*Nhận xét:* Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng n4(n – 2) + 3, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 3 thì 23 có chữ số tận cùng là 8 ; 37 có chữ số tận cùng là 7 ; 411 có chữ số tận cùng là 4 ; …

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:  (8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

\* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

**Bài toán 4:** Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho n2 + n + 1 chia hết cho 19952000.

**Lời giải:** 19952000 tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu n2 + n + 1 có chia hết cho 5 không ?

Ta có n2 + n = n(n + 1), là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của n2 + n chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 => n2 + n + 1 chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 => n2 + n + 1 không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho n2 + n + 1 chia hết cho 19952000.

Sử dụng tính chất *“một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9”*, ta có thể giải được bài toán sau:

**Bài toán 5:** Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương:

a) M = 19k + 5k + 1995k + 1996k (với k chẵn)

b) N = 20042004k + 2003

Sử dụng tính chất *“một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9”*, ta tiếp tục giải quyết được bài toán:

**Bài toán 6:** Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng:  p8n +3.p4n – 4 chia hết cho 5.

\* Các bạn hãy giải các bài tập sau:

**Bài 1:** Tìm số dư của các phép chia:

a) 21 + 35 + 49 + … + 20038005 cho 5

b) 23 + 37 + 411 + … + 20038007 cho 5

**Bài 2:** Tìm chữ số tận cùng của X, Y:

X = 22 + 36 + 410 + … + 20048010

Y = 28 + 312 + 416 + … + 20048016

**Bài 3:** Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau:

U = 21 + 35 + 49 + … + 20058013

V = 23 + 37 + 411 + … + 20058015

**Bài 4:** Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

19x + 5y + 1980z = 1975430 + 2004.

\* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

**Tìm hai chữ số tận cùng:**

**Nhận xét:** Nếu x Є N và x = 100k + y, trong đó k ; y Є N thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

Hiển nhiên là y ≤ x. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x = am như sau:

***Trường hợp 1:*** Nếu a chẵn thì x = am ∶ 2m. Gọi n là số tự nhiên sao cho an – 1 ∶ 25.

Viết m = pn + q (p ; q Є N), trong đó q là số nhỏ nhất để aq ∶ 4 ta có:

x = am = aq(apn – 1) + aq.

Vì an – 1 ∶ 25 => apn – 1 ∶ 25. Mặt khác, do (4, 25) = 1 nên aq(apn – 1) ∶ 100.

Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của aq.

***Trường hợp 2:*** Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho an – 1 ∶ 100.

Viết m = un + v (u ; v Є N, 0 ≤ v < n) ta có:

x = am = av(aun – 1) + av.

Vì an – 1 ∶ 100 => aun – 1 ∶ 100.

Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của av. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của av.

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của aq và av.

**Bài toán 7:**

Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a)   a2003     b)  799

**Lời giải:** a) Do 22003 là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho 2n – 1 ∶ 25.

Ta có 210 = 1024 => 210 + 1 = 1025 ∶ 25 => 220 – 1 = (210 + 1)(210 – 1) ∶ 25 => 23(220 – 1) ∶ 100. Mặt khác:
22003 = 23(22000 – 1) + 23 = 23((220)100 – 1) + 23 = 100k + 8 (k Є N).

Vậy hai chữ số tận cùng của 22003 là 08.

b)   Do 799 là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho 7n – 1 ∶

Ta có 74 = 2401 => 74 – 1 ∶ 100.

Mặt khác:  99 – 1 ∶ 4 => 99 = 4k + 1 (k Є N)

Vậy 799 = 74k + 1 = 7(74k – 1) + 7 = 100q + 7 (q Є N) tận cùng bởi hai chữ số 07.

**Bài toán 8:**

Tìm số dư của phép chia 3517 cho 25.

**Lời giải:** Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3517. Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho 3n – 1 ∶ 100.

Ta có 310 = 95 = 59049 => 310 + 1 ∶ 50 => 320 – 1 = (310 + 1) (310 – 1) ∶ 100.

Mặt khác:  516 – 1 ∶ 4 => 5(516 – 1) ∶ 20
=> 517 = 5(516 – 1) + 5 = 20k + 5 =>3517 = 320k + 5 = 35(320k – 1) + 35 = 35(320k – 1) + 243, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3517 cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp.

Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu a = 2 hoặc a = 3 thì n = 20 ; nếu a = 7 thì n = 4.

Một câu hỏi đặt ra là:  Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

**Tính chất 4:** Nếu a Є N và (a, 5) = 1 thì a20 – 1 ∶ 25.

**Bài toán 9:** Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng:

a) S1 = 12002 + 22002 + 32002 + … + 20042002

b) S2 = 12003 + 22003 + 32003 + … + 20042003

**Lời giải:**

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì a100 – 1 chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi a Є N và (a, 5) = 1 ta có a100 – 1 ∶ 25.

Vậy với mọi a Є N ta có a2(a100 – 1) ∶ 100.

Do đó S1 = 12002 + 22(22000 – 1) + … + 20042(20042000 – 1) + 22 + 32 + … + 20042.

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng 12 + 22 + 32 + … + 20042. áp dụng công thức:  12 + 22 + 32 + … + n2 = n(n + 1)(2n + 1)/6
=>12 + 22 + … + 20042 = 2005 x 4009 x 334 = 2684707030, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, S2 = 12003 + 23(22000 – 1) + … + 20043(20042000 – 1) + 23 + 33 + 20043. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của 13 + 23 + 33 + … + 20043.

áp dụng công thức:

=> 13 + 23 + … + 20043 = (2005 x 1002)2 = 4036121180100, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

**Tính chất 5:** Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu:

+ A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;

+ A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;

+ A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;

+ A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;

+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

**Bài toán 10:** Cho n Є N và n – 1 không chia hết cho 4. Chứng minh rằng 7n + 2 không thể là số chính phương.

**Lời giải:** Do n – 1 không chia hết cho 4 nên n = 4k + r (r Є {0, 2, 3}). Ta có 74 – 1 = 2400 ∶ 100. Ta viết 7n + 2 = 74k + r + 2 = 7r(74k – 1) + 7r + 2.

Vậy hai chữ số tận cùng của 7n + 2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của 7r + 2 (r = 0, 2, 3) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng 7n + 2 không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

**Tìm ba chữ số tận cùng:**

**Nhận xét:** Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Nếu x = 1000k + y, trong đó k ; y Є N thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y (y ≤ x).

Do 1000 = 8 x 125 mà (8, 125) = 1 nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x = am như sau:

***Trường hợp 1:*** Nếu a chẵn thì x = am chia hết cho 2m. Gọi n là số tự nhiên sao cho an – 1 chia hết cho 125.

Viết m = pn + q (p ; q Є N), trong đó q là số nhỏ nhất để aq chia hết cho 8 ta có:

x = am = aq(apn – 1) + aq.

Vì an – 1 chia hết cho 125 => apn – 1 chia hết cho 125. Mặt khác, do (8, 125) = 1 nên aq(apn – 1) chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của am cũng chính là ba chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của aq.

***Trường hợp 2:*** Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho an – 1 chia hết cho 1000.

Viết m = un + v (u ; v Є N, 0 ≤ v < n) ta có:

x = am = av(aun – 1) + av.

Vì an – 1 chia hết cho 1000 => aun – 1 chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của am cũng chính là ba chữ số tận cùng của av. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của av.

Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

**Tính chất 6:**

Nếu a Є N và (a, 5) = 1 thì a100 – 1 chia hết cho 125.

**Chứng minh:** Do a20 – 1 chia hết cho 25 nên a20, a40, a60, a80 khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

=> a20 + a40 + a60 + a80 + 1 chia hết cho 5. Vậy a100 – 1 = (a20 – 1)( a80 + a60 + a40 + a20 + 1) chia hết cho 125.

**Bài toán 11:**

Tìm ba chữ số tận cùng của 123101.

**Lời giải:** Theo *tính chất 6*, do (123, 5) = 1 => 123100 – 1 chia hết cho 125   (1).

Mặt khác:

123100 – 1 = (12325 – 1)(12325 + 1)(12350 + 1) => 123100 – 1 chia hết cho 8   (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra:  123100 – 1 chi hết cho 1000

=> 123101 = 123(123100 – 1) + 123 = 1000k + 123 (k ∩ N).

Vậy 123101 có ba chữ số tận cùng là 123.

**Bài toán 12:**

Tìm ba chữ số tận cùng của 3399…98.

**Lời giải:** Theo *tính chất 6*, do (9, 5) = 1 => 9100 – 1 chi hết cho 125   (1).

Tương tự bài 11, ta có 9100 – 1 chia hết cho 8   (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra:  9100 – 1 chia hết cho 1000 => 3399…98 = 9199…9 = 9100p + 99 = 999(9100p – 1) + 999 = 1000q + 999 (p, q Є N).

Vậy ba chữ số tận cùng của 3399…98 cũng chính là ba chữ số tận cùng của 999.

Lại vì 9100 – 1 chia hết cho 1000 => ba chữ số tận cùng của 9100 là 001 mà 999 = 9100:  9 => ba chữ số tận cùng của 999 là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 999 là 9, sau đó dựa vào phép nhân  để xác định ).

Vậy ba chữ số tận cùng của 3399…98 là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước:  Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

**Bài toán 13:**

Tìm ba chữ số tận cùng của 2004200.

**Lời giải:** do (2004, 5) = 1 (*tính chất 6*)

=> 2004100 chia cho 125 dư 1

=> 2004200 = (2004100)2 chia cho 125 dư 1

=> 2004200 chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004200 chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.

Sau đây là một số bài tập vận dụng:

**Bài tập tìm chữ số tận cùng:**

**Bài 1:** Chứng minh 1n + 2n + 3n + 4n chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

**Bài 2:** Chứng minh 920002003, 720002003 có chữ số tận cùng giống nhau.

**Bài 3:** Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 3999    b) 111213

**Bài 4:** Tìm hai chữ số tận cùng của:

S = 23 + 223 + … + 240023

**Bài 5:** Tìm ba chữ số tận cùng của:

S = 12004 + 22004 + … + 20032004

**Bài 6:** Cho (a, 10) = 1. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a101 cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.

**Bài 7:** Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A200.

**Bài 8:**Tìm ba chữ số tận cùng của số:

199319941995 …2000

**Bài 9:** Tìm sáu chữ số tận cùng của 521.